|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | **Тема** | **Цели** | **Задачи** | **Контрольные вопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 29.09.21 | **Обратная матрица. Матричные уравнения и системы линейных алгебраических уравнений.** | Дидактическая | Определить алгебраическое дополнение какого-либо элемента, невырожденную матрицу, обратную матрицу, присоединенную матрицу, ознакомить с алгоритмом нахождения обратной матрицы методом присоединённой матрицы, ознакомить в общим видом системы линейных алгебраических уравнений, начать формирование умений и навыков нахождения матрицы, обратной к данной и решения матричных уравнений. | 1) Закрепить умения и навыки вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.2) Определить алгебраическое дополнение какого-либо элемента, невырожденную матрицу, обратную матрицу, присоединенную матрицу.3) Изучить метод присоединённой матрицы.4) Ознакомить с общим видом системы линейных алгебраических уравнений5) Начать формирование умений и навыков нахождение обратной матрицы и решения матричных уравнений. | 1)Как найти алгебраическое дополнение элементов?2) Какая матрица является невырожденной?3)Какие свойства определителей вы знаете?4) Определите обратную матрицу5) Из чего состоит присоединённая матрица?6) Как найти матрицу, обратную к данной, пользуясь методом присоединённой матрицы? | Изучить и составить конспект лекции, решить задания по образцу, **найти матрицу, обратную к данной** **А =**$\left(\begin{matrix}6&1\\-3&2\end{matrix}\right)$**,****решить матричное уравнение** $\left(\begin{matrix}3&0\\1&1\end{matrix}\right)$ **∙ Х =** $\left(\begin{matrix}1&1\\1&3\end{matrix}\right)$**.** |
| Группа | 2ТЭМ | Развивающая | Развивать логическое мышление и память. |
| Пара | I | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 10 |

Подтвердите своё присутствие на занятии. Выполните задания лекционного занятия, составьте конспект. Фото конспекта с решенными заданиями отправьте на почту **elenabragina7@gmail.com** до 30.09.21 включительно. Работа должна быть решена в рамках рабочего времени, отведенного на занятие по математике**.**

**29.09**

**Обратная матрица. Матричные уравнения и системы линейных алгебраических уравнений.**

**1) Закрепление материала. (записать в конспект).**

**Ответить на вопросы (вопросы и ответы записать):**

1) Назовите два основных понятия линейной алгебры.

2) Матрица – это … (одним словом)

3) Определитель – это …(одним словом)

4) Какие действия можно выполнять с матрицами?

5) Что такое транспонирование матриц?

6) Чему равен определитель 2-го порядка?

7) Пользуясь каким методом можно вычислить определитель 3-го?

**Решить практические задания по образцу (образец и решенные задания записать):**

1) Вычислить определитель 2-го:

∆ =$\left|\begin{matrix}-7&4\\6&1\end{matrix}\right|$ = -7∙1-6∙4 = -7 – 24 = -31 (умножаем элементы, расположенные по главной диагонали, а затем вычитаем произведение элементов на побочной диагонали).

∆ =$\left|\begin{matrix}5&-2\\3&9\end{matrix}\right|$ = 5∙9 - 3∙(-2) = 45 + 6

∆ =$\left|\begin{matrix}-2&-9\\3&7\end{matrix}\right|$ = **решить самостоятельно. Ответ: 13**

∆ =$\left|\begin{matrix}3&-8\\-2&1\end{matrix}\right|$ = **решить самостоятельно. Ответ: -13**

2) Вычислить определитель 3-го порядка по правилу Лапласа:

∆ = $\left|\begin{matrix}4&-2&1\\3&5&0\\-1&3&4\end{matrix}\right|$ = (вычёркиваем элементы первой строки, выписываем эти элементы, помня, что первый элемент – знак не меняет, второй – меняет, третий – не меняет, умножаем эти элементы на определитель 2-го порядка, полученный при вычёркивании строки и столбца, на пересечении которых находится элемент) = 4∙ $\left|\begin{matrix}5&0\\3&4\end{matrix}\right|$ + 2∙ $\left|\begin{matrix}3&0\\-1&4\end{matrix}\right|$ +1∙ $\left|\begin{matrix}3&5\\-1&3\end{matrix}\right|$ = 4∙(5∙4-3∙0) + 2∙(3∙4 - 0∙(-1)) + (3∙3 – (-1)∙ 5) = 4∙ (20-0) + 2∙(12-0) +1∙(9+5) = 4∙20 + 2∙12+ 1∙14 = 80+24+14 = 118.

∆ = $\left|\begin{matrix}-3&5&-1\\6&-7&1\\2&-5&1\end{matrix}\right|$ = **решить самостоятельно. Ответ: 2.**

**2) Изучение нового материала по плану (изучить и составить конспект):**

1) Определение алгебраического дополнения какого-либо элемента

2) Определение квадратной матрицы

3) Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы, алгоритм.

4) Матричные уравнения.

5) Системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим все перечисленные вопросы и составим конспект по теме «Обратная матрица. Матричные уравнения и системы линейных алгебраических уравнений».

**1) Определение.** Алгебраическим дополнением какого-либо элемента определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, взятый с тем же знаком, если сумма цифр номера – число чётное и с противоположным – если нечётное. Обозначается $А\_{ij}$ .

**Пример 1.**

Возьмём определитель 2-го порядка∆ =$\left|\begin{matrix}3&-8\\-2&1\end{matrix}\right|$ и найдём алгебраические дополнения для некоторых элементов:

$А\_{12}$ = (сразу ставим минус, так как 1+2=3 - число нечётное, вычёркиваем 1-ю строку и 2-ой столбец, так как номер элемента 12, записываем, что остается) = -(-2) = 2.

$А\_{11}$ = 1 (знак не меняется, вычёркиваем 1-ю строку и 1-й столбец, что осталось – записали).

$А\_{21}$ **=** **найти самостоятельно.**

**Пример 2.**

Возьмём определитель 3-го порядка ∆ = $\left|\begin{matrix}-3&5&-1\\6&-7&1\\2&-5&1\end{matrix}\right|$ . Найдём:

$А\_{31}$= ( знак не меняется, так как 3+1=4, вычёркиваем 3-ю строку и 1-й столбец) = $\left|\begin{matrix}5&-1\\-7&1\end{matrix}\right|$ = 5∙1 – (-7)∙(-1) = 5 – 7 = -2.

$А\_{23}$= (знак меняется, так как 2+3=5, вычёркиваем 2-ю строку и 3-й столбец) = - $\left|\begin{matrix}-3&5\\2&-5\end{matrix}\right|$ = - (15 – 10) = - 5.

$А\_{32} $ **=** **найти самостоятельно.**

$А\_{13}$ **=** **найти самостоятельно.**

**2) Определение.** Квадратная матрицаn-го порядка называется невырожденной (неособенной), если соответствующий ей определитель отличен от нудя. В противном случае – матрица вырожденная (особенная).

**Определение.** Для невырожденнойматрицы существует обратная $А^{-1}$, такая, что А$∙А^{-1}$ = $А^{-1}∙А$ = Е (единичная матрица).

Для нахождения матрицы, обратной к данной, можно применять метод присоединённой матрицы и формулу:

$А^{-1} $= $\frac{1}{∆}$ ∙$\tilde{А^{Т}}$,

где ∆ - определитель матрицы,

А (тильда А) **–** присоединённая матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы А.

**3) Алгоритм нахождения матрицы, обратной к матрице А.**

1) Найти ∆ для матрицы А. Если ∆ = 0, то обратной матрицы не существует, если ∆ = 0, то

2) Найти $А\_{ij}$ для всех элементов матрицы А

3) Составить присоединенную матрицу $\tilde{А}$

4) Транспонировать присоединённую матрицу

5) Найти обратную матрицу по формуле $А^{-1} $= $\frac{1}{∆}$ ∙ $\tilde{А^{Т}}$.

**Пример 3.**

Найти матрицу, обратную к матрице А = $\left(\begin{matrix}3&-2\\4&1\end{matrix}\right)$.

1) ∆ = $\left|\begin{matrix}3&-2\\4&1\end{matrix}\right|$ = 3∙1 - 4∙(-2) = 3 + 8 = 11 = 0

2) $А\_{11}$ **= 1** $ А\_{12}$ **= -4**

$А\_{21}$ **= -(-2) = 2** $А\_{22}$ **= 3**

3)$\tilde{А}$ **=**$ \left(\begin{matrix}1&-4\\2&3\end{matrix}\right)$

4) $\tilde{А^{Т}}$= $\left(\begin{matrix}1&2\\-4&3\end{matrix}\right)$

5) $А^{-1} $= $\frac{1}{∆}$ ∙ $\tilde{А^{Т}}$ = $\frac{1}{11}$ ∙ $\left(\begin{matrix}1&2\\-4&3\end{matrix}\right) $= $\left(\begin{matrix}1/11&2/11\\-4/11&3/11\end{matrix}\right)$. Если внутри полученной матрицы сократимые дроби, то их нужно сократить.

**Найти матрицу, обратную к матрице А =** $\left(\begin{matrix}6&-3\\2&-1\end{matrix}\right)$**.** **Решить самостоятельно.**

**4) Рассмотрим понятие матричного уравнения и выведем формулы для решения простейших матричных уравнений.**

**Определение.** Уравнение, содержащее неизвестную матрицу называется матричным. Чаще всего неизвестная матрица обозначается Х.

Простейшими матричными уравнениями считаются уравнения вида:

А ∙ Х = В или Х ∙ А = В.

Для того, чтобы найти неизвестную матрицу Х необходимо умножить левую и правую часть уравнения на обратную матрицу $А^{-1}$ с той стороны, где открыт доступ у матрице А (ведь делить матрицы нельзя!):

$А^{-1}$ ∙ А ∙ Х = $А^{-1}$ ∙ В или Х ∙ А ∙ $А^{-1}$ = В ∙ $А^{-1}$.

По определению обратной матрицы $А^{-1}$ ∙ А = А ∙ $А^{-1}$= Е – единичная матрица, т.е. 1. Мы знаем, что при умножении какого-либо элемента на единицу этот элемент не меняется. Получаем формулы для решения простейших матричных уравнений:

Х = $А^{-1}$ ∙ В или Х = В ∙ $А^{-1}$.

Мы получили формулы для решения простейших матричных уравнений. Для применения этих формул необходимо найти обратную матрицу $А^{-1}$ (5 шагов) и умножить две матрицы в соответствии с формулой. Имеем **алгоритм решения простейшего матричного уравнения:**

1. Найти ∆ для матрицы А. Если ∆ = 0, то обратной матрицы не существует, если ∆ = 0, то

2. Найти $А\_{ij}$ для всех элементов матрицы А

3. Составить присоединенную матрицу $\tilde{А}$

4. Транспонировать присоединённую матрицу

5. Найти обратную матрицу по формуле $А^{-1} $= $\frac{1}{∆}$ ∙$\tilde{А^{Т}}$.

6. Находим неизвестную матрицу Х по одной из формул Х = $А^{-1}$ ∙ В или Х = В ∙ $А^{-1}$ в соответствии с видом уравнения.

**Пример 1.** Решить матричное уравнение:

Х ∙ $\left(\begin{matrix}2&0\\-1&1\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}4&1\\1&1\end{matrix}\right)$.

Выбираем формулу решения в соответствии с видом уравнения: Х = В ∙ $А^{-1}$

Обозначим матрицы: А = $\left(\begin{matrix}2&0\\-1&1\end{matrix}\right)$, В = $\left(\begin{matrix}4&1\\1&1\end{matrix}\right)$.

Выполним алгоритм пошагово:

 1) ∆ = $\left|\begin{matrix}2&0\\-1&1\end{matrix}\right|$ = 2∙1 – (-1)∙0 = 2 ≠ 0

2) $А\_{11}$ = 1 $ А\_{12}$ = -(-1) = 1

 $А\_{21}$ = - 0 = 0 $А\_{22}$ = 2

3) $\tilde{А} $=$ \left(\begin{matrix}1&1\\0&2\end{matrix}\right)$

4) $\tilde{А^{Т}}$= = $\left(\begin{matrix}1&0\\1&2\end{matrix}\right)$

5) $А^{-1} $= $\frac{1}{∆}$ ∙ $\tilde{А^{Т}}$= = $\frac{1}{2}$ ∙ $\left(\begin{matrix}1&0\\1&2\end{matrix}\right) $(умножать не нужно)

6) Берём выбранную формулу Х = В ∙ $А^{-1}$ и применяем её:

Х =$\left(\begin{matrix}4&1\\1&1\end{matrix}\right)$. $\frac{1}{2}$ ∙ $\left(\begin{matrix}1&0\\1&2\end{matrix}\right)$ = (перенесём числовой множитель вперёд) = $\frac{1}{2}\left(\begin{matrix}4&1\\1&1\end{matrix}\right)$∙ $\left(\begin{matrix}1&0\\1&2\end{matrix}\right)$ = $\frac{1}{2}$ ∙ $\left(\begin{matrix}4∙1+1∙1&4∙0+1∙2\\1∙1+1∙1&1∙0+1∙2\end{matrix}\right)$ = (из первой матрицы для умножения берём строки, а из второй – столбцы) = $\frac{1}{2}$ ∙ $\left(\begin{matrix}5&2\\2&2\end{matrix}\right)$ = (а теперь умножим матрицу на число) = $\left(\begin{matrix}5/2&2/2\\2/2&2/2\end{matrix}\right)$ = =$\left(\begin{matrix}5/2&1\\1&1\end{matrix}\right)$.

**Пример 2.** Решить матричное уравнение Х ∙ $\left(\begin{matrix}1&0\\2&1\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}0&1\\1&1\end{matrix}\right)$. **Решить самостоятельно.**

**5) Система m линейных уравнений с n неизвестными - это система вида:**

 (1)

Элементы aij называют *коэффициентами* системы уравнений, которые имеют два индекса, первый из которых и указывает на номер уравнения, содержащей данный элемент, а второй j - на номер неизвестной, рядом с которой размещен этот коэффициент.

Элементы bi - называются *свободными* членами.

**3) Домашнее задание. Изучить и записать конспект лекции, решить задания по образцу, найти матрицу, обратную к данной А =**$\left(\begin{matrix}6&1\\-3&2\end{matrix}\right)$**, решить матричное уравнение** $\left(\begin{matrix}3&0\\1&1\end{matrix}\right)$ **∙ Х =** $\left(\begin{matrix}1&1\\1&3\end{matrix}\right)$**.**